Πραγματική Ανάλυση

23-10-17

ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ.

Έστω τυχόν σύνολο X. Μια συνάρτηση $\varphi: X\times X \to \mathbb{R}^+$, όπου $\mathbb{R}^+ = \{\text{θετικοί}\}\cup\{0\}$ ονομάζεται μετρική στο X αν κάποιες από τις ιδιότητες:

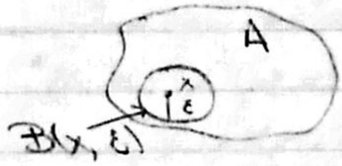
1) $\varphi((x,y)) \geq 0 \quad \forall (x,y)\in X\times X = X^2$
2) $\varphi((x,y)) = \varphi((y,x)) \quad \forall (x,y)\in X^2$
3) $\varphi((x,y)) = 0$ αν-ν $x=y$
4) $\varphi((x,y)) \leq \varphi((x,z)) + \varphi((z,y)) \quad \forall x,y,z\in X$

τριγωνική ανισότητα

$B(x,\varepsilon_0) = \{y\in X \mid \varphi((x,y)) < \varepsilon_0\}$ ← ορισμός μπάλας

$x\in X \quad \varepsilon_0>0 \quad B(x,\varepsilon_0)$ = μπάλα κέντρου x και ακτίνας ε_0.

ορισμός: Ένα σύνολο $A\subseteq X$ ονομάζεται ανοικτό αν ικανοποιεί το εξής:
Για κάθε $x\in A \ \exists\, \varepsilon>0: B(x,\varepsilon)\subseteq A$

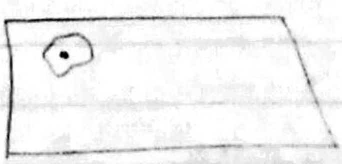


σχόλιο: ορίζουμε το ανοικτό και κλειστό σύνολο με βάση την έννοια της μετρικής.

ορισμός: Ένα σύνολο B είναι κλειστό αν το $X-B$ είναι ανοικτό.

- Έστω $A\subseteq X$
  $\mathring{A} = \bigcup\{B\subseteq X \mid B \text{ είναι ανοικτό και } B\subseteq A\}$ ← εσωτερικό του συνόλου

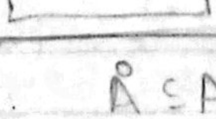
είναι ανοικτό



είναι κλειστό

- Έστω $\Gamma\subseteq X$
  $\overline{\Gamma} = \bigcap\{\Delta\subseteq X \mid \Gamma\subseteq\Delta \text{ και το } \Delta \text{ είναι κλειστό}\}$ ← κλειστότητα

Τα σημεία (στοιχεία) του $\mathring{A}$ ονομάζονται εσωτερικά σημεία του A.



$$\boxed{\text{Ισχύει: } \mathring{A}\subseteq A\subseteq \overline{A} \quad \forall A\subseteq X}$$

Προσοχή

Ιδιότητες

$X = \mathbb{R}^2$

1) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$
2) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
3) $(A \cap B)^\circ \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B}$

4) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^\circ = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^\circ = \mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2 \cap \ldots \cap \mathring{A}_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{A}_i$

για $A_i \subseteq X$ $i = 1, 2, \ldots n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

6) $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$

$= \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ Για $A_i \subseteq X$ $i = 1, \ldots n$, $n \in \mathbb{N}$

$X = \mathbb{R}^2$

$x_1 = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$x_2 = (y_3, y_4) \in \mathbb{R}^2$

$\rho : \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2}_{= X} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\rho((x_1, x_2)) \overset{\text{ορ}}{=} \sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (y_2 - y_4)^2} = \|x_1 - x_2\|$

ορισμός μετρικής στον $\mathbb{R}^2$

$a = (a_1, a_2)$ $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ← νόρμα

* ——— * ——— * ——— *

Έστω $I \in \mathcal{L}_2$, το I είναι φραγμένο διάστημα.

Τότε:

$\mathring{\overline{I}} = \mathring{I}$ ειδικά για τα διαστήματα

Παρατήρηση (1) (άσκηση)

Αν $I_1, I_2 \in \mathcal{L}_2$ και $I_1 \subseteq I_2$ τότε $V(I_1) \leq V(I_2)$

Παρατήρηση (2): Έστω $I_1 = J_1 \times J_2$ όπου $J_1, J_2, J_3, J_4 \in \mathcal{L}_1$

δηλαδή φραγμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει:

$I_1 \cap I_2 = (J_1 \times J_2) \cap (J_3 \times J_4) = (J_1 \cap J_3) \times (J_2 \cap J_4)$

όταν θα μιλάμε για διαστήματα εννοούμε φραγμένα !

Εφόσον $J_1 \cap J_3$, $J_2 \cap J_4 \in \mathcal{L}_1$ έπεται ότι:
$$(J_1 \cap J_3) \times (J_2 \cap J_4) \in \mathcal{L}_2$$

η τομή μπορεί να είναι το ϕ ή ένα μονοσύνολο αλλά θα είναι φραγμένο διάστημα

Σχόλιο

Δηλαδή: Η τομή διαστημάτων του $\mathbb{R}^2$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}^2$.

Πρόταση: Αν I, I_i $i=1,2,\dots n$, $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ $\in \mathcal{L}_2$ και τα I_i, $i \in T_n$, να είναι σχεδόν ξένα ανά 2 και $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ τότε
$$V(I) = \sum_{i=1}^{n} V(I_i)$$

Πρόταση: Έστω I, I_i $i=1\dots n$ διαστήματα του $\mathcal{L}_2$ τω

$\boxed{Προσ}$

$\bigcup_{i=1}^{n} I_i \subseteq I$ και τα I_i, $i \in T_n$ να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο. Τότε, ισχύει: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
$$\sum_{i=1}^{n} V(I_i) \leq V(I)$$

$V(\,)$ εμβαδόν

Απόδειξη: Επειδή $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \subseteq I$ έπεται ότι: $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right)} \subseteq \overline{I}$ (1)

Τώρα ισχύει $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{I_i}$ (2)

Από τις (1), (2) έπεται ότι $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{I_i} \subseteq \overline{I}$ (3)

Όταν I_i είναι διάστημα του $\mathcal{L}_2$ τότε και το $\overline{I_i} \in \mathcal{L}_2$.

Προφανώς, $\overline{I_i} \subseteq \overline{I}$, $\forall i \in T_n$.

Θεωρούμε την άλγεβρα $\mathcal{A}_{\overline{I}}$. Άρα, $\overline{I_i} \in \mathcal{A}_{\overline{I}}$ $\forall i \in T_n$ από τον ορισμό της $\mathcal{A}_I$. Από γνωστή παρατήρηση το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{I_i} \in \mathcal{A}_{\overline{I}}$

Θέτουμε $J := \bigcup_{i=1}^{n} \overline{I_i}$ (6) Άρα, $J \in \mathcal{A}_{\overline{I}}$.

Από την ιδιότητα (1) της άλγεβρας, αφού $\boxed{J \in \mathcal{A}_{\overline{I}}}$, άρα και το $\overline{I} \setminus J \in \mathcal{A}_{\overline{I}}$

! Περιέχει μόνο ενώσεις διαστημάτων

Από τον ορισμό της $A_{\bar{I}}$, αφού $\bar{I}\setminus J \in A_{\bar{I}}$ έπεται ότι ∃ διαστήματα $J_1, J_2, \dots, J_m$ του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\bar{I}\setminus J = \bigcup_{i=1}^{m} J_i$ (4) για κάποιο $m\in\mathbb{N}$ και τα J_i, $i=1,\dots,m$ είναι σχεδόν ανά δύο ξένα.
Επίσης, ισχύει ότι:

$$\bar{I} = J\cup(\bar{I}\setminus J) \quad (5)$$

γνωστή συνολοθεωρητική ιδιότητα.

Από τις (4), (6) έχουμε ότι:

$$\bar{I} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m} J_j\right) \quad (7)$$

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι πολλά (*) σύνολα είναι σχεδόν ξένα ανά δύο. Παίρνω δύο οποιαδήποτε σύνολα από τα (*) κι δω είναι σχεδόν ξένα ανά δύο

Προσοχή

Σκεπτικό

Παίρνω τα I_{i_1}, I_{i_2} με $i_1, i_2 \in \{1,2,\dots n\}$ και $i_1\neq i_2$
$\mathring{I}_{i_1}\cap \mathring{I}_{i_2}=\emptyset$

$$\mathring{\bar{I}}_{i_1}\cap\mathring{\bar{I}}_{i_2} = \mathring{I}_{i_1}\cap\mathring{I}_{i_2}=\emptyset$$

Άρα τα σύνολα $\bar{I}_i$, $i=1,2,\dots n$ είναι σχεδόν ξένα ανά δύο.

Αφού δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είναι προφανές ότι δεν θα έχουν και κανένα κοινό εσωτερικό σημείο.

Προσοχή!

Δηλαδή, $$J\cap(\bar I\setminus J)=\phi,\ \left.\begin{aligned}\bar I_i&\subseteq J\\ J_j&\subseteq \bar I\setminus J\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar I_i\cap J_j \subseteq J\cap(\bar I\setminus J)=\phi \quad \begin{aligned}&\forall i\in T_n\\ &\forall j\in T_n\end{aligned}$$

Άρα, τα I_i, J_j είναι ξένα άρα είναι και σχεδόν ξένα για κάθε $i\in T_n$, $\forall j\in T_m$

Άρα, τα σύνολα $\bar I_i$, J_j $i\in T_n$, $j\in T_m$ είναι σχεδόν ξένα ανά δύο.

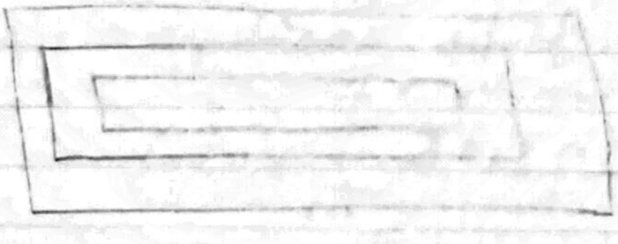
Άρα, από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι:

$$V(I)=V(\bar I)=\sum_{i=1}^{n} V(\bar I_i)+\sum_{j=1}^{m} V(J_j)\geq \sum_{i=1}^{n} V(\bar I_i) = \sum_{i=1}^{n} V(I_i)$$

Έπεται ότι ∃ διαστήματα, άρα έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση: Έστω $I, I_i, i=1,2,\dots n \in \mathcal{L}_2$ τω $I\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Τότε ισχύει $V(I)\leq \sum_{i=1}^{n} V(I_i)$.

Απόδειξη:



Πρόταση: Έστω $A, B_1, B_2, \dots B_n$ υποσύνολα ενός συνόλου X. Τότε ισχύει

$$\boxed{A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)} \quad (*)$$

Θα το χρησιμοποιήσουμε

Περίπτωση 1: Τα I_i, $i \in T_n$ είναι σχεδόν ξένα ανά δύο.

Αφού $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, έχουμε

$$I = I \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) \overset{4}{=} \bigcup_{i=1}^{n} (I \cap I_i) \quad (1)$$

Τα $I \cap I_i$, $i \in T_n \in \mathcal{L}_2$ $\forall i = 1, 2, \dots n$

$I \cap I_{i_1}$, $I \cap I_{i_2}$, για $i_1, i_2 \in T_n$ $i_1 \neq i_2$

$$(I \cap I_{i_1})^{\circ} \cap (I \cap I_{i_2})^{\circ} = (\mathring{I} \cap \mathring{I}_{i_1}) \cap (\mathring{I} \cap \mathring{I}_{i_2}) =$$
$$= \mathring{I} \cap \mathring{I}_{i_1} \cap \mathring{I}_{i_2} \subseteq \mathring{I}_{i_1} \cap \mathring{I}_{i_2} = \emptyset$$

Άρα, τα σύνολα $I \cap I_i$, $i \in T_n$ είναι σχεδόν ξένα ανά δύο. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) και την γνωστή πρόταση (την είπαμε στην αρχή) ισχύει το εξής:

$$v(I) = \sum_{i=1}^{n} v(I \cap I_i) \quad (3)$$

Αλλά,

$$v(I \cap I_i) \leq v(I_i), \ \forall i \in T_n \quad (4)$$

Από την (4) αθροίζουμε τις (4) για $i = 1, 2, \dots n$ κατά μέλη έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} v(I \cap I_i) \leq \sum_{i=1}^{n} v(I_i) \quad (5)$$

Από τις (3), (5) έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση: Έστω I, I_i, $i=1,2,\dots$ να είναι διαστήματα του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε τα I_i, $i=1,2,\dots$ να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i \subseteq I$. Τότε ισχύει: $\sum_{i=1}^{+\infty} V(I_i) \le V(I)$

Απόδειξη

Έστω $n\in\mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \subseteq I$. Άρα, εφαρμόζεται η προηγούμενη πρόταση και παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} V(I_i) \le V(I) \quad (1) \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = V(I)$, για $n=1,2,\dots$

Από την (1) αν $s_n = a_1+a_2+\dots+a_n$, για $n=1,2,\dots$ τότε

$s_n \le V(I) < +\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Η s_n είναι αύξουσα, αφού προφανώς $s_{n+1} \ge s_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, η s_n συγκλίνει και $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} V(I)$

$s_n \xrightarrow{+\infty} \lim_{n\to+\infty} s_n \le V(I)$

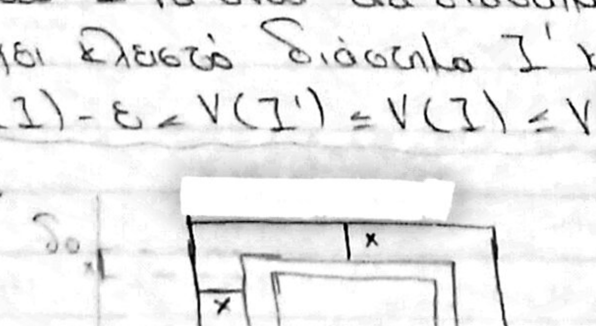
Άρα, $\sum_{n=1}^{+\infty} V(I_n) \le V(I)$. □

ακολουθία συγκλίνει και κάθε όρος της ακολουθίας είναι φραγμένος άνω τότε και το όριο της ακολουθίας είναι φραγμένο άνω

Σχόλιο.

Πρόταση: Έστω I να είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}^2$. Έστω τυχόν $\varepsilon>0$. Τότε, υπάρχει κλειστό διάστημα I' και ανοικτό διάστημα I'' τέτοια να ισχύουν: $V(I)-\varepsilon < V(I') \le V(I) \le V(I'') < V(I)+\varepsilon$ και $I' \subseteq I \subseteq I''$.

Απόδειξη:



$a_0, b_0, \gamma_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$

$a_0 < b_0$ και $\gamma_0 < \delta_0$

$I = (a_0, b_0] \times [\gamma_0, \delta_0)$

$I'_x = [a_0+x, b_0-x] \times [\gamma_0+x, \delta_0-x]$

Θέλουμε $a_0+x < b_0-x \iff 2x < b_0-a_0$, $x < \frac{b_0-a_0}{2}$

$x < \frac{\delta_0-\gamma_0}{2}$

$x \in \left(0, \min\left\{\frac{b_0 - a_0}{2}, \frac{\delta_0 - \gamma_0}{2}\right\}\right)$

$$V(I'_x) = \left((b_0 - x) - (a_0 + x)\right) \cdot \left((\delta_0 - x) - (\gamma_0 + x)\right) =$$
$$= (b_0 - a_0 - 2x)(\delta_0 - \gamma_0 - 2x)$$

$f : (0, c_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = V(I'_x)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = (b_0 - a_0)(\delta_0 - \gamma_0) = V(I)$$

$V(I) - \varepsilon < V(I)$

Άρα, $\exists\, x_0 \in (0, c_0) : f(x_0) > V(I) - \varepsilon$

$\overset{\shortparallel}{V}(I'_{x_0})$

$\exists\, I'_{x_0}$ με $I'_{x_0} \subseteq I$ αλλά $V(I) - \varepsilon < V(I'_{x_0}) \subseteq V(I)$

παίρνω τώρα, $(a_0 - x, b_0 + x) \times (\gamma_0 - x, \delta_0 + x) = I''_x$

$V(I) - \varepsilon < V(I)$

Άρα, $\exists\, x_0 \in (0, c_0) : \underbrace{\lambda(x_0)}_{V'(I'_{x_0})} > V(I) - \varepsilon$

$\exists\, I'_{x_0}$ με $I'_{x_0} \subseteq I$ αλλά $V(I) - \varepsilon < V(I'_{x_0}) \subseteq V(I)$

παίρνω, τώρα, $(a_0 - x, b_0 + x) \times (\gamma_0 - x, \delta_0 + x) = I''_x$

Προφανώς, $I \subseteq I''$.

$V(I''_x) = ((b_0 + x) - (a_0 - x))((\delta_0 + x) - (\gamma_0 - x)) = (b_0 - a_0 + 2x)(\delta_0 - \gamma_0 + 2x)$

$\phi : (0,1) \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = V(I''_x) = (b_0 - a_0 + 2x)(\delta_0 - \gamma_0 + 2x)$

$\lim_{x \to 0} \phi(x) = (b_0 - a_0)(\delta_0 - \gamma_0) = V(I)$

$\exists\, y_0 > 0 \quad \underbrace{\phi(y_0)}_{V(I''_{y_0})} < V(I) + \varepsilon \Rightarrow V(I_{y_0}) < V(I) + \varepsilon$, $I''_{y_0} \supseteq I$

σχόλιο

Μπορώ να ορίσω την φ σ' όλο το $\mathbb{R}$, αλλά χρειάζομαι να βρω τις θετικές τιμές λίγο πάνω από το μηδέν, γι' αυτό χρησιμοποιώ το διάστημα (0,1)